CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES SCIENTIFIQUES 1984

ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

I

1. En remarquant que l'on a :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \quad \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{n(n+1)\dots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+m)}\right],$$

calculer la somme

$$S_p(m) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+m)} \quad \text{et} \quad \lim_{p \to +\infty} S_p(m).$$

2. On se propose de calculer une valeur approchée de la somme σ de la série de terme général :

$$a_n = \frac{2n-1}{n^3+n+2} \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

a. Montrer que l'on a : $a_n < \frac{2}{n^2}$ et, en utilisant une intégrale généralisée, donner un majorant du reste :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n.$$

En déduire le nombre de termes à additionner pour que $\sigma_p = \sum_{n=1}^{p} a_n$ approche σ à 10^{-4} près.

b. Pour réduire ce nombre de termes, on écrit :

$$(1) \qquad a_n = \frac{C_1}{n(n+1)} + \frac{C_2}{n(n+1)(n+2)} + \frac{C_3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \alpha_n.$$

Calculer C_1, C_2, C_3 tels que :

$$C_1 = \lim_n [n(n+1)a_n]$$

$$C_2 = \lim_n \left[\left(a_n - \frac{C_1}{n(n+1)}\right) n(n+1)(n+2)\right]$$

$$C_3 = \lim_n \left[\left(a_n - \frac{C_1}{n(n+1)} - \frac{C_2}{n(n+1)(n+2)}\right) n(n+1)(n+2)(n+3)\right].$$

c. Donner l'expression de α_n en fonction de n et prouver que l'on a : $|\alpha_n| < \frac{14}{n^5}$.

3. *a.* Calculer, comme au § I.2.*a*, une valeur de p pour avoir :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} |\alpha_n| < 2.10^{-4}.$$

b. Calculer $\sum_{n=1}^{p} \alpha_n$. On dressera un tableau donnant les p valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ à 5.10^{-7} près.

c. En déduire une valeur approchée de $\sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ à 10^{-4} près.

II

1. *a.* Calculer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{où} \qquad a_n = \frac{2n-1}{n^3+n+2}.$$

b. Trouver une expression de :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

En déduire une expression de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_1 x^n}{n(n+1)}.$$

c. De même, calculer les expressions des sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_2 x^n}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_3 x^n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

d. Ces trois dernières expressions sont-elles valables pour $x = 1$? pour $x = -1$? Justifier les réponses. Peut-on alors vérifier certains résultats de la partie I ?

2. *a.* Calculer une valeur de p pour que $\sum_{n=1}^{p} (-1)^n \alpha_n$ soit une valeur approchée de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \alpha_n$ à 2.10^{-4} près.

b. Calculer une valeur approchée de cette somme à 10^{-4} près.

c. En déduire une valeur approchée de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ à 10^{-4} près.